الموضوع : 7

ملاحظة: المتتالية التابعية المتقاربة بانتظام على E تكون متقاربة نقطياً والعكس غير صحيح في الحالة العامة.

مثال: ادرس التقارب النقطي والمنتظم لمتتالية التوابع والتي حدها العام:

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin nx$$

على المجال $]-\infty, +\infty[$

الحل: المتتالية متقاربة نقطياً من التابع:

$$f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = x^2 + 0 = x^2 ; \ \forall x \in \mathbb{R}$$

لندرس التقارب المنتظم على $\mathbb{R}$:

من أجل أي عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ لنوجد $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ بحيث يكون:

$$\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$|f_n(x) - f(x)| = x^2 + \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) - x^2 \left| \frac{1}{n} \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{n} \cdot 1$$

$$\leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

بالتالي نختار $N(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon}$ عدد طبيعي والتقارب منتظم على $\mathbb{R}$.

مبرهنة [معيار التقارب بانتظام]:

لتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع الحقيقية المعرفة على $E \in \mathbb{R}$ ؛ عندئذٍ تكون المتتالية $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام من التابع f على $E \subseteq \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان:

$$M_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$$

تسعى (متقاربة) من الصفر عندما $n \to \infty$.

نتيجة: لإثبات أن المتتالية $\{f_n\}$ ليست متقاربة بانتظام من التابع f على $E \subseteq \mathbb{R}$ يمكن أن نوجد متتالية من النقاط $x_n \in E$ بحيث يكون:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon > 0$$

(ε عدد موجب)

يعني أن $|f_n(x) - f(x)| \not\to 0$

الموضوع :

مثال: ادرس التقارب النقطي المنتظم لمتتالية التوابع:

$f_n(x) = x^n(1-x)$

على المجال $[0,1]$

الحل:

متتالية التوابع تتقارب نقطياً نحو التابع :

$F(x)=0 \; , \; \forall x \in [0,1]$

لدراسة التقارب بانتظام على $[0,1]$ لنأخذ :

$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |x^n(1-x)-0|$

$= \sup_{x\in[0,1]} x^n(1-x)$

لنأخذ : $f_n(x) = x^n(1-x)$

لنوجد المشتق :

المشتق = 0

$f_n'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot (1-x) - x^n$

$= x^{n-1}(n(1-x)-x)$

المشتق ينعدم عند النقطة التي تحقق $n(1-x)-x=0$

$\Rightarrow x = \frac{n}{n+1} \in [0,1]$

على المجال $[0, \frac{n}{n+1}]$ يكون $f_n'(x) \geq 0$

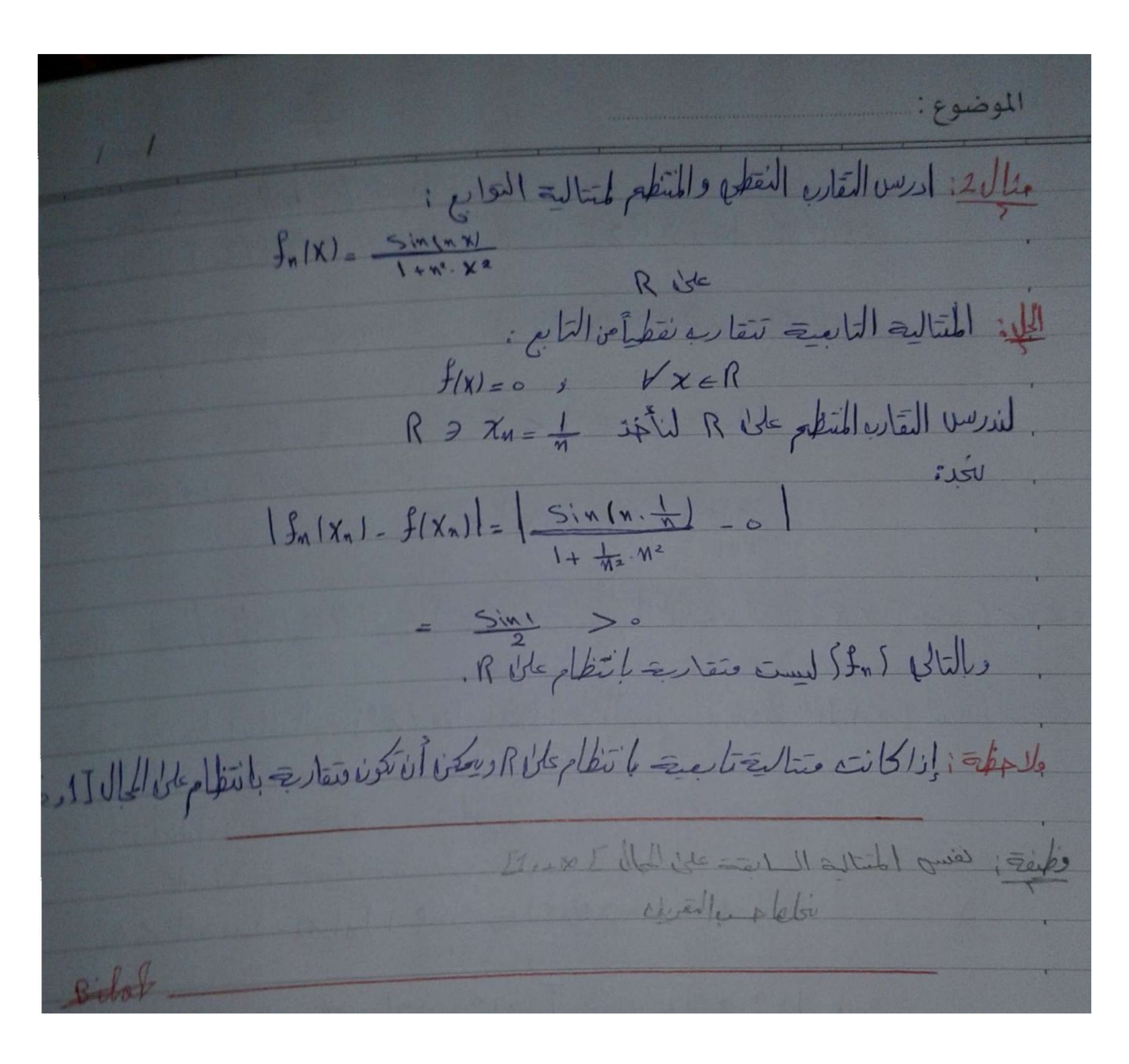
" " $[\frac{n}{n+1}, 1]$ " $f_n'(x) \geq 0$

والتابع يبلغ قيمته العظمى عندما $x = \frac{n}{n+1}$

$M_n = \sup_{x\in[0,1]} x^n(1-x)$

$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = 0$

والمتتالية متقاربة بانتظام على $[0,1]$.



الموضوع :

/ /

مثال 2: ادرس التقارب النقطي والمنتظم لمتتالية التوابع :

$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2 \cdot x^2}$

على R

الحل: المتتالية التابعية تتقارب نقطياً من التابع :

$f(x) = 0 \quad , \quad \forall x \in R$

لندرس التقارب المنتظم على R لنأخذ $R \ni x_n = \frac{1}{n}$

نجد:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \frac{\sin(n \cdot \frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n^2} \cdot n^2} - 0 \right|$$

$$= \frac{\sin 1}{2} > 0$$

وبالتالي (f_n) ليست متقاربة بانتظام على R .

ملاحظة: إذا كانت متتالية تابعية بانتظام على R ويمكن أن تكون متقاربة بانتظام على المجال I

وظيفة: نفس المتتالية السابقة على المجال $]1, +\infty[$

بانتظام حسب التعريف

Sidal